

## การเรียนรู้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

1. ประวัติและความเป็นมาโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)
2. คุณสมบัติของโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)
3. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)
4. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต

### 1. ประวัติและความเป็นมาเกี่ยวกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์ที่ผลิตจากประเทศสหรัฐอเมริกา เป็นโปรแกรมที่มีประสิทธิภาพโปรแกรมหนึ่ง สามารถนำไปใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ได้หลายวิชา เช่น วิชาเรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ และแคลคูลัส โปรแกรม GSP เป็นสื่อเทคโนโลยีที่ช่วยให้ผู้เรียน มีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง (Constructivist Approach) และเป็นการเรียนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ (Learner-Centered Learning) โปรแกรม GSP เป็นสื่อที่ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะของการนึกภาพ (Visualization) ทักษะของกระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) นอกจากนี้ การใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์ และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกันทำให้ผู้เรียนมีโอกาสพัฒนาหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางภาษา ด้านตรรกศาสตร์ ด้านมิติสัมพันธ์ และด้านศิลปะ ด้วยเหตุผลดังกล่าว โปรแกรม GSP จึงได้รับรางวัลยอดเยี่ยมหลายรางวัล อาทิเช่น Best Educational Software of All Time จาก Stevens Institute of Technology Survey of Mentor Teachers และ Most Valuable Software for Students จาก National Survey of Mathematics Teachers, USA.

GSP เป็นโปรแกรมที่ครูสามารถนำไปใช้เป็นเครื่องมือเพื่อช่วยให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพและน่าสนใจมาก สามารถนำเสนอภาพเคลื่อนไหว (Animation) มาใช้อธิบายเนื้อหาที่ยากๆ เช่น ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ (เรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส), ฟิสิกส์ (กลศาสตร์ และอื่นๆ) ให้เป็นรูปธรรม ให้นักเรียนได้เรียนรู้และเข้าใจง่าย และโปรแกรมยังเน้นให้ผู้เรียนฝึกปฏิบัติด้วยตัวเองได้ นอกจากนี้ ยังสามารถนำไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนวิชาอื่นๆ เช่น วิทยาศาสตร์ ศิลปะ อย่างไม่มีข้อจำกัด ในเนื้อหาการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง รูปแบบเดิม นักเรียนจะใช้ไม้บรรทัดวัดความยาว หรือและใช้วงเวียนแบ่งครึ่งเส้นตรง โดยตั้งต้นที่จุดเริ่มต้นของเส้นตรง กางวงเวียนให้เลยจุดกึ่งกลาง แล้ววาดเส้นโค้ง จากนั้นตั้งต้นที่จุดสิ้นสุดของเส้นตรงอีกด้าน แล้วลากเส้นโค้งโดยวิธีเดียวกัน เพื่อหาจุดตัด เป็นเส้นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง หากใช้โปรแกรม GSP

ก็ใช้วิธีการแบ่งครึ่งของเส้นตรงโดยยึดหลักการเดียวกัน ได้คิดเหมือนกัน ได้ลงมือปฏิบัติเช่นกัน แต่กลับทำได้รวดเร็วกว่ามาก

การแสดงให้เห็นให้นักเรียนเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมไม่ว่าจะเป็นรูปสามเหลี่ยมลักษณะใดจะมีผลรวมของขนาดของมุมภายในเป็น 180 องศาเสมอ โปรแกรม GSP จะช่วยได้ดีมาก โดยครูสร้างรูปสามเหลี่ยมขึ้นมาหนึ่งรูป กำหนดให้โปรแกรมแสดงขนาดของมุมภายในทั้ง 3 มุมของรูปสามเหลี่ยม และให้โปรแกรมหาผลรวมของขนาดของมุมทั้งสาม จากนั้นครูสามารถปรับเปลี่ยนลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นนั้น ให้เป็นแบบต่างๆ โปรแกรมจะแสดงให้เห็นว่า ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเปลี่ยนไป แต่ผลรวมของขนาดของมุมทั้งสามยังคงเท่ากับ 180 องศาเสมอ หรือการแสดงให้เห็นว่า เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา โปรแกรม GSP จะช่วยให้การสอนเรื่องนี้ทำได้ง่าย และสะดวก รวดเร็วขึ้น โดยครูสร้างเส้นขนานคู่หนึ่ง และเส้นตรงหนึ่งเส้นให้ตัดเส้นขนานคู่ที่สร้างขึ้น แล้วกำหนดให้โปรแกรมแสดงขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด และให้แสดงผลรวมของขนาดของมุมภายในคู่หนึ่ง ซึ่งจะได้เท่ากับ 180 องศา หลังจากนั้นครูสามารถปรับเปลี่ยนลักษณะของเส้น คู่ขนาน หรือเส้นตัด ให้มีลักษณะต่างๆ ผลรวมของขนาดของมุมภายในก็ยังคงเป็น 180 องศา

โปรแกรมนี้ทำให้ครูและนักเรียนมีเวลาในการเรียนการสอนมากขึ้น เพราะไม่ต้องเสียเวลานานในการสร้างรูป เรขาคณิตจำนวนมากเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีต่างๆ อีกทั้งยังทบทวนได้ง่ายและบ่อยขึ้น การสอนด้วยโปรแกรม GSP ยังทำให้นักเรียนเรียนได้สนุก เข้าใจได้เร็ว และน่าตื่นเต้น นอกจากนั้น การใช้ GSP สร้างสื่อการสอนและใบงาน ยังทำได้รวดเร็วและแม่นยำกว่าใช้โปรแกรมไมโครซอฟต์ออฟฟิศอื่นๆ

GSP สามารถสร้าง เกมสนุกๆ ทางคณิตศาสตร์ ได้มากมาย ดังที่ปรากฏในหนังสือ 101 Project Ideas for The Geometer's Sketchpad ยกตัวอย่างเช่น เด็กๆ จะได้สนุกกับการสร้างใบหน้าคน จากเส้นโค้ง เส้นตรง วงกลม สี่เหลี่ยม ที่แสดงอารมณ์ปกติและอารมณ์โกรธ และทดลองสร้างภาพด้วยตัวเอง นอกจากนั้น สำหรับนักออกแบบโปรแกรม GSP ยังใช้สร้างแผนภาพ รูปร่าง รูปทรงสามมิติได้มากมาย

โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นมิติใหม่ของการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างสนุก เข้าใจง่าย และเป็นรูปธรรม เส้นแต่ละเส้น โค้งแต่ละโค้ง มุมแต่ละมุม รูปทรงหลากหลายแบบ เสริมสร้างประสิทธิภาพให้แก่เยาวชนทั้งด้านความคิดและจินตนาการ

อย่างไรก็ตาม โปรแกรม GSP นั้นเป็นเพียงเครื่องมืออันทรงคุณค่า สิ่งสำคัญที่สุดก็คือ วิธีการ ที่ต้องใช้ให้เป็น ให้เกิดประโยชน์สูงสุด ครูจะต้องเข้าใจ และเตรียมการสอน เพื่อให้นักคณิตศาสตร์ในใจ เด็กไทยของกวมและเดบิต

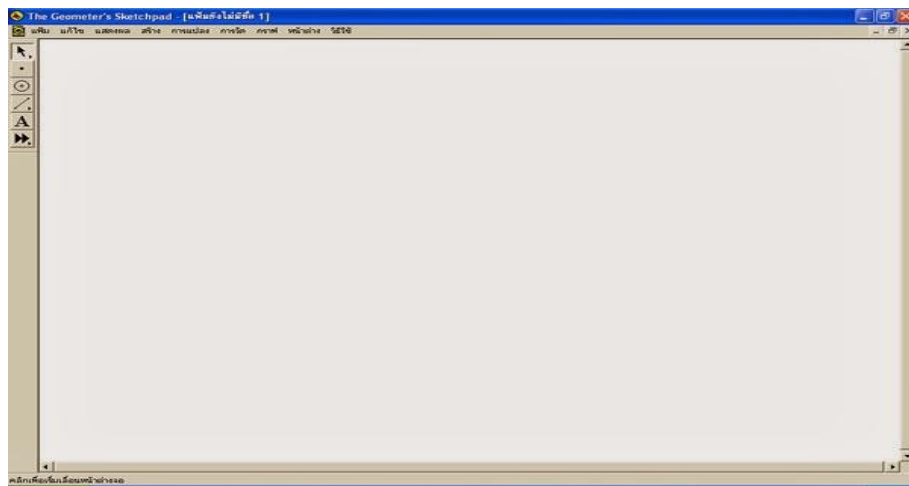
## 2. คุณสมบัติของโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อเทคโนโลยีที่ช่วยให้ผู้เรียน มี โอกาสเรียนคณิตศาสตร์โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง (Constructivist Approach) และเป็น การเรียนโดยเน้นผู้เรียนเป็น สาคัญ (Learner-Centered Learning) โปรแกรม GSP เป็นสื่อที่ช่วยให้ ผู้เรียนพัฒนาทักษะของการนึกภาพ (Visualization) ทักษะของกระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) นอกจากนี้การใช้โปรแกรมGSPในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นการบูรณ การ สาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์และทักษะด้านเท คโน โลยีเข้าด้วยกันท ำให้ผู้เรียนมีโอกาส พัฒนาพหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางภาษา ด้านตรรกศาสตร์ ด้านมิติสัมพันธ์ และด้านศิลปะ ด้วย เหตุผลดังกล่าว โปรแกรม GSP จึงได้รับรางวัลยอดเยี่ยมหลายรางวัล อาทิเช่น Best Educational Software of All Time จาก Stevens Institute of Technology Survey of Mentor Teachers และ Most Valuable Software for Students จาก National Survey of Mathematics Teachers, USA. โปรแกรม GSP มีใช้อย่างแพร่หลายกว่า 50 ประเทศทั่วโลก อีกทั้งบรรจุอยู่ในหลักสูตรวิชา คณิตศาสตร์ระดับต่างๆ ถึง 10 ประเทศ เช่น สิงคโปร์ มาเลเซีย ญี่ปุ่น จีน อังกฤษ อเมริกา เป็นต้น นอกจากนี้ได้มีการแปลซอฟต์แวร์โปรแกรม GSP เป็นภาษาต่างๆ ถึง 15 ภาษา ได้แก่ฝรั่งเศส สเปน เดนมาร์ก เกาหลี ญี่ปุ่น รัสเซีย นอร์เวย์ ฟินแลนด์ อาหรับ เซกโก เปรู เยอรมัน จีน อังกฤษและ ภาษาไทย การน าเทคโนโลยีสารสนเทศมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ท ำให้ผู้เรียนมี โอกาสพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้ตรงตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่จ ำเป็นส ำหรับ ผู้เรียนทุกคน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.2550 : <http://thaigsp.ispt.ac.th>) โปรแกรมThe Geometer's Sketchpad เป็นสื่อการสอนที่ใหม่ล่าสุดในวงการ คณิตศาสตร์ศึกษาของไทย ซึ่งในขณะที่กว่า 60 ประเทศทั่วโลกใช้โปรแกรมดังกล่าวกันมานาน แล้ว โดยมีการแปลโปรแกรมเป็นภาษาต่าง ๆ มากมาย ซึ่งโปรแกรม GSP ได้รับการแปลเป็น ภาษาไทยเช่นกัน ส ำหรับประเทศไทยนั้น สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้เล็งเห็นถึงศักยภาพของโปรแกรมนี้อ จึงได้ท ำการซื้อลิขสิทธิ์และน ำมาแปลเป็นเวอร์ชัน ภาษาไทย เพื่อความสะดวกในการใช้งานส ำหรับผู้เรียนและผู้สอน โปรแกรม GSP เป็นโปรแกรมที่น่าสนใจอีกโปรแกรมหนึ่งซึ่งครูสามารถน ำไปใช้เป็น เครื่องมือเพื่อช่วยในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น เพราะสามารถน ำเสนอภาพเคลื่อนไหว (Animation) มาใช้อธิบายเนื้อหายาก ๆ ให้เกิดความเข้าใจ ได้ง่ายขึ้น เช่น ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์(เรขาคณิต พีชคณิต ตรี โทณมิติแคลคูลัส) ชุดฝึกอบรมด้วยตนเอง การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อพัฒนาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ อภิชาติ เพชรพลอยศึกษานิเทศก์ สพม. เขต 5 4 พิสิทธ์(กลศาสตร์แสงคลื่น) ให้นักเรียนได้เรียนรู้และเข้าใจได้อย่างรวดเร็ว และ โปรแกรมยังเน้น ำให้ผู้เรียนฝึกปฏิบัติด้วยตัวเอง ได้นอกจากนี้ยังสามารถน ำไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน วิชาอื่นๆ ได้อย่างไม่มีข้อ กัดเช่น วิทยาศาสตร์ศิลปะการออกแบบและเทคโนโลยี เป็นต้น

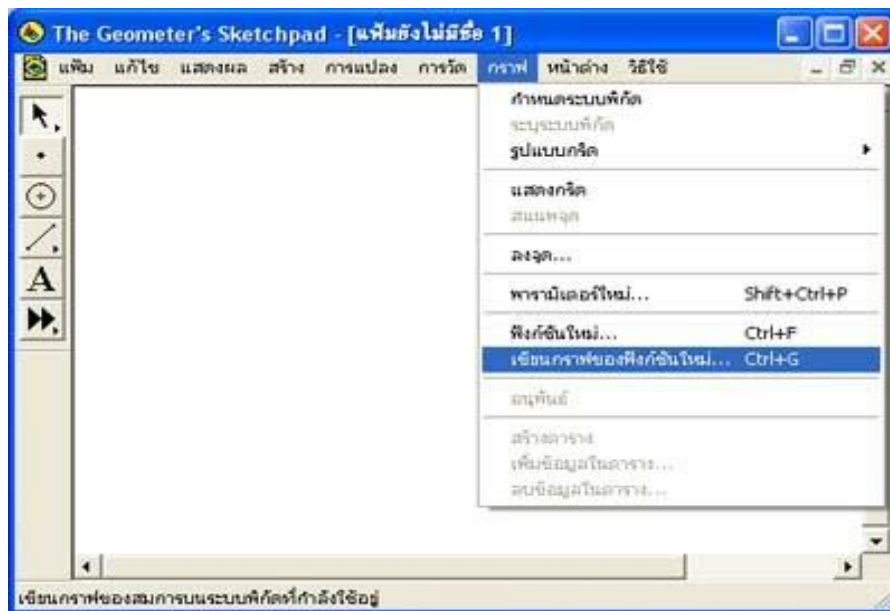
### 3. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นระบบซอฟต์แวร์ที่ใช้สำหรับสร้าง ส ารวจ และ การวิเคราะห์สิ่งต่างๆที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์หลายด้าน โปรแกรม GSP เป็นสื่อเทคโนโลยี ที่ช่วย ให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองโดยการสร้างองค์ความรู้ ด้วยตนเอง (Constructivist Approach) เป็นสื่อที่ช่วยให้ ผู้เรียนพัฒนาทักษะของการนึกภาพ (Visualization) ้ทักษะของกระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) นอกจากนี้การใช้ โปรแกรมGSPในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นการบูรณ การ สาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้ คณิตศาสตร์และทักษะด้านเท คโน โลยีเข้าด้วยกันท าให้ผู้เรียนมีโอกาส พัฒนาพหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางภาษา ด้านตรรกศาสตร์ ด้านมิติสัมพันธ์ และด้านศิลปะ

### ส่วนประกอบของ The Geometer 'S Sketchpad (GSP)



### แถบคำสั่ง(Menu bar)



คำสั่งใน

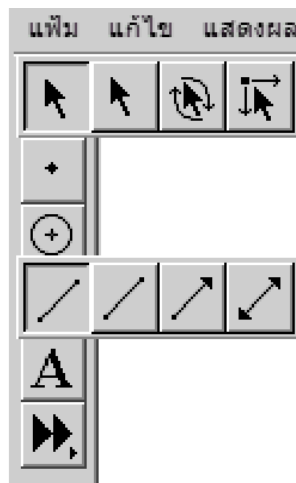
เมนู

## Sketchpad ประกอบด้วย

- เมนูเพิ่ม
- เมนูแก้ไข
- แสดงผล
- เมนูสร้าง
- เมนูการแปลง
- เมนูวัดผล
- เมนูกราฟ

## กล่องเครื่องมือ

เมื่อเริ่มต้นโปรแกรม GSP กล่องเครื่องมือจะอยู่ด้านซ้ายของหน้าจอมีทั้งหมด 6 ชนิด



เครื่องมือลูกศร (การแปลง, หมุน, ย่อ/ขยาย)

เครื่องมือวาดจุด

เครื่องมือวาดวงกลม

เครื่องมือวาดเส้นตรง (ส่วนของเส้นตรง, รัศมี, เส้นตรง)

เครื่องมือสร้างข้อความ

เครื่องมือกำหนดเอง

## ประโยชน์การใช้โปรแกรม GSP

1. ใช้สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีปฏิสัมพันธ์ได้หลากหลายตั้งแต่การค้นหาในระดับพื้นฐานซึ่งเกี่ยวกับรูปร่างและจำนวนไปจนถึงภาพวาดขั้นสูงที่มีความซับซ้อน และเคลื่อนไหวได้

2. ทำให้นักเรียนได้รับความรู้จากการเรียน ฝึกการใช้เวลาว่างให้เกิดประโยชน์

3. นักเรียนมีทักษะกระบวนการในการแก้ปัญหา โดยใช้ GSP

4. นักเรียนมีทักษะกระบวนการในการทำงานกลุ่ม การช่วยเหลือกัน และมีทักษะ

กระบวนการคิด

5. นักเรียนเกิดความคิดสร้างสรรค์ในการทำงาน หรือการผลิตชิ้นงานโดยใช้ GSP และสามารถนำไปสร้างชิ้นงานได้จริง เช่น การจักสานลายต่างๆโดยใช้ GSP ออกแบบนำไปเป็นผลิตภัณฑ์ สร้างรายได้อีกทางหนึ่ง

6. นักเรียนรู้จักการบูรณาการ ในเรื่องต่างๆ เพื่อนำมาปรับใช้กับตัวเองได้

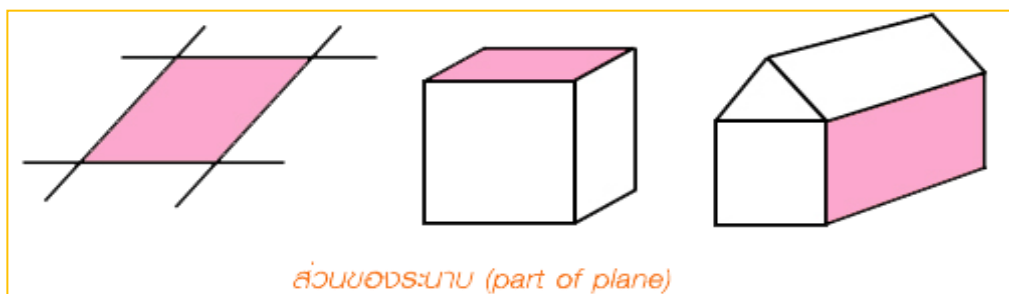
#### 4. ความรู้เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตเบื้องต้น

##### เรขาคณิตเบื้องต้น

- จุด ( point ) เราใช้จุดแสดงตำแหน่งของสิ่งต่างๆ เช่น ตำแหน่งของสถานที่ในแผนที่ ตำแหน่งของดวงดาว ในทางเรขาคณิต "จุด" เป็นคำนิยาม (undefined term) ไม่ต้องอธิบายความหมายว่าเป็นอะไร ในอดีตยุคกรีกเคยพยายามให้ความหมายของจุดไว้ว่า หมายถึง สิ่งที่ไม่มีความกว้างและความยาว ซึ่งเป็นการให้นิยามที่ยังไม่สมบูรณ์ เพราะต้องใช้คำที่ไม่สามารถให้นิยามได้อีก ได้แก่ คำว่า "ความกว้างและความยาว" เพื่อช่วยให้เข้าใจตรงกัน จึงตั้งชื่อจุดโดยใช้ตัวอักษรภาษาไทย หรือตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น ก ข หรือ A เช่น

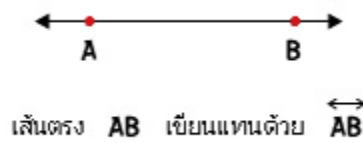
- ก อ่านว่า จุด ก
- ข อ่านว่า จุด ข
- A อ่านว่า จุด A

- ระนาบ ( plane ) หมายถึง พื้นที่ผิวแบนและเรียบที่แผ่ขยายออกไปอย่างไม่สิ้นสุด ส่วนของพื้นที่ผิวที่เราเห็นขอบเขตได้จึงเป็น "ส่วนของระนาบ" เท่านั้น การกำหนดระนาบจะต้องใช้จุดอย่างน้อย 3 จุด และทั้ง 3 จุดนั้นจะต้องไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน



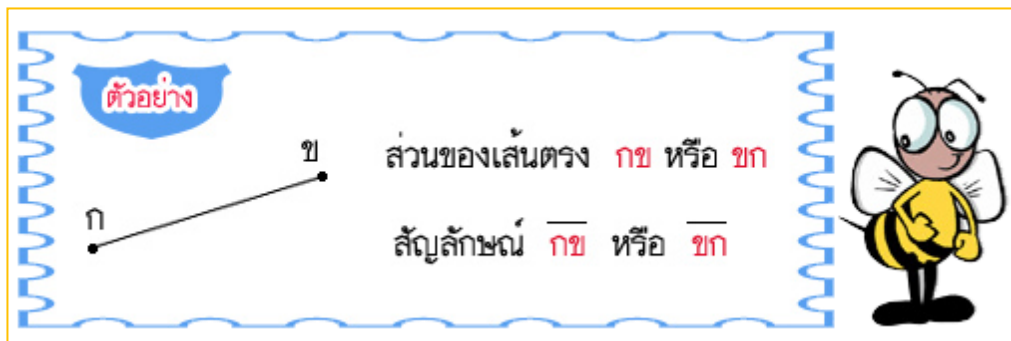
ที่มาของภาพ : [http://www.myfirstbrain.com/student\\_view.aspx?ID=5105](http://www.myfirstbrain.com/student_view.aspx?ID=5105)

- **เส้นตรง (line)** เส้นตรงเป็นคำนิยาม มีความยาวไม่จำกัด ไม่มีความกว้าง เราเขียนสัญลักษณ์แทนเส้นตรง AB ดังนี้



สัญลักษณ์ของเส้นตรงจะมีหัวลูกศรทั้งสองข้าง แสดงว่าเส้นตรงมีความยาวไม่จำกัดเราสามารถต่อเส้นตรงออกไปตามทิศทางของหัวลูกศรทั้งสองข้างโดยไม่มีที่สิ้นสุด

- **ส่วนของเส้นตรง (line segment)** กำหนดจุดขึ้นมา 2 จุด เช่น จุด A และจุด B แล้วนำไม้บรรทัดหรือสันตรงมาวางทาบให้ผ่านจุดทั้งสอง และใช้ดินสอจรดที่จุด A แล้วลากดินสอไปตามสันของไม้บรรทัดหรือสันตรงจนถึงจุด B เส้นที่เกิดขึ้นเรียกว่า " ส่วนของเส้นตรง AB " ( line segment AB ) โดยมีจุด A และ จุด B เป็น " จุดปลาย " ( end points )



ที่มาของภาพ : [http://www.myfirstbrain.com/student\\_view.aspx?ID=59758](http://www.myfirstbrain.com/student_view.aspx?ID=59758)

ข้อสังเกต

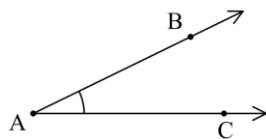
1. ส่วนของเส้นตรงมีความยาวจำกัด
2. ส่วนของเส้นตรงทั้งหลายที่ต่อระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ ส่วนของเส้นตรงที่สั้นที่สุดคือส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน

- **เส้นโค้ง (curve)** ถ้าจรดดินสอบนกระดาษแล้วลากไปในลักษณะใดก็ได้ เส้นที่เกิดขึ้นเรียกว่า "curve" ซึ่งแปลเป็นภาษาไทยตามหนังสือศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถานว่า "เส้นโค้ง" แต่ curve ในความหมายของนักคณิตศาสตร์ ไม่จำเป็นที่จะต้องมิลักษณะโค้งงอสมดังชื่อเสมอไป ส่วนของเส้นตรง รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม ฯลฯ ล้วนเป็น curve ด้วยกันทั้งสิ้น

- **รังสี (ray)** ถ้าใช้คินสองจุดที่จุด A แล้วลากเส้นตามขอบของสันตรงไปเรื่อยๆ เส้นที่เกิดขึ้น เรียกว่า "รังสี" เรียกจุด A ว่า "จุดปลายของรังสี" ถ้าลากเส้นจากจุด A ให้ผ่านจุด B แล้วต่อเส้นออกไปเรื่อยๆ เส้นที่เกิดขึ้นเรียกว่า "รังสี AB"



- **มุม (angle)** มุมเกิดจากรังสีสองเส้นที่มีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน จุดนี้เรียกว่า "จุดยอดมุม" รังสีแต่ละเส้นเรียกว่า "แขนของมุม"



จากรูป จุด A เป็นจุดยอดมุม

$\vec{AB}$  และ  $\vec{AC}$  เป็นรังสีที่มีจุดปลาย A ร่วมกันเรียกว่า AB และ AC ว่า แขนของมุม

BAC เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์  $\hat{BAC}$

ขนาดของมุม BAC เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $m(\hat{BAC})$

#### ชนิดของมุม

- มุมแหลม คือ เป็นมุมที่มีขนาดเล็กกว่ามุมฉาก
- มุมฉาก คือ เป็นมุมที่มีขนาด 90 องศา
- มุมป้าน คือ เป็นมุมที่มีขนาดใหญ่กว่ามุมฉากแต่ไม่ถึงสองมุมฉาก
- มุมตรง คือ เป็นมุมที่มีขนาดเป็นสองเท่าของมุมฉาก
- มุมกลับ คือ เป็นมุมที่มีขนาดใหญ่กว่าสองมุมฉาก แต่ไม่ถึงสี่มุมฉาก
- มุมรอบจุด คือ มุมที่มีขนาด 360 องศา แขนทั้งสองข้างมุมจะทับกันได้สนิทพอดี

โดยทั่วไปเราเขียน " $^{\circ}$ " แทนคำว่า "องศา" เช่น  $90^{\circ}$  อ่านว่า เก้าสิบองศา และ  $35^{\circ}$  อ่านว่า สามสิบห้าองศา

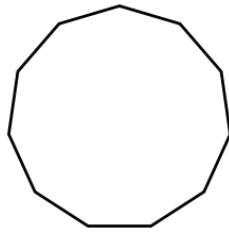
#### รูปเรขาคณิตสองมิติ

รูปเรขาคณิตสองมิติ ( two - dimensional geometric figure ) แบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆ ตามลักษณะของขอบหรือด้านของรูป ได้แก่ กลุ่มที่มีขอบหรือด้านของรูปเป็นส่วนของเส้นตรง กลุ่มนี้คือ "รูปหลายเหลี่ยม ( polygon )" และกลุ่มที่มีขอบหรือด้านเป็นเส้นโค้งงอ เช่น รูปวงกลม และรูปวงรี เป็นต้น กลุ่มนี้ไม่มีชื่อเรียกโดยเฉพาะ

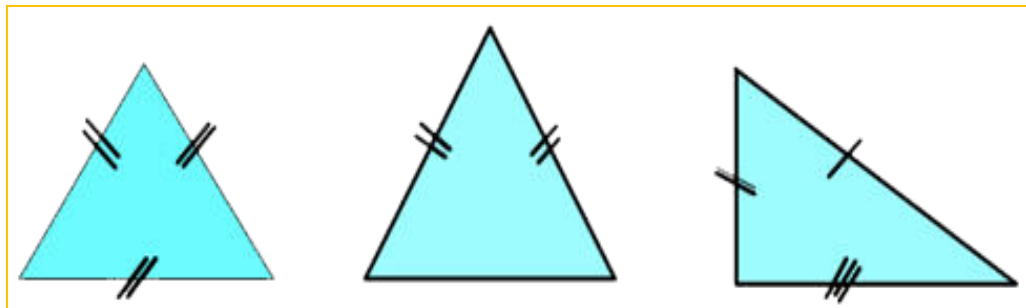


**รูปหลายเหลี่ยม (Polygon)** เป็นรูปปิดที่เกิดจากส่วนของเส้นตรงตั้งแต่ 3 เส้นขึ้นไป โดยที่จุด A, B, C, ... , P, Q,... เป็นจุดที่แตกต่างกันบนระนาบ และไม่มี 3 จุดใดอยู่ร่วมส่วนของเส้นตรงเดียวกัน เรียกว่า "ด้านของรูปหลายเหลี่ยม" จุด A, B, C, ... , P, Q,... เรียกว่า "จุดยอด" จำนวนมุมในรูปหลายเหลี่ยมจะเท่ากับจำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยม ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดยอดที่ไม่ใช่ปลายของส่วนของเส้นตรงเดียวกัน เรียกว่า "เส้นทแยงมุม (diagonal)"

**รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า (regular polygon)** คือ รูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมมีขนาดเท่ากัน



**รูปสามเหลี่ยม (Triangle)** เป็นรูปหลายเหลี่ยมชนิดหนึ่ง ประกอบด้วยด้านที่เป็นส่วนของเส้นตรง 3 เส้น ส่วนของเส้นตรงทั้งสามนี้ต้องอยู่บนระนาบเดียวกัน ซึ่งทำให้เกิดมุม 3 มุม



ที่มาของภาพ : [http://www.trueplookpanya.com/new/cms\\_detail/knowledge/930-00/](http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/930-00/)

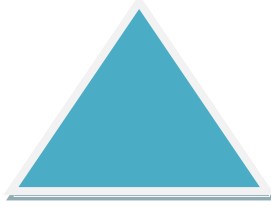
#### ข้อสังเกต

1. ความสูงของรูปสามเหลี่ยมเป็นเท่าใด ขึ้นอยู่กับว่าให้ด้านใดเป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม ความสูงมีได้ 3 ค่า ซึ่งอาจจะมีค่าต่างกัน
2. ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม อาจะอยู่ในหรือนอกรูปสามเหลี่ยมก็ได้

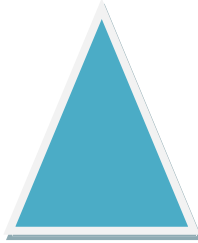
ชนิดของรูปสามเหลี่ยม การจำแนกรูปสามเหลี่ยม มีเกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

### 1. พิจารณาจากความยาวของด้านจำแนกได้ดังนี้

1.1 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (equilateral triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาวเท่ากัน



1.2 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (isosceles triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน



1.3 รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (scalene triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่ไม่มีด้าน 2 ด้านใดยาวเท่ากัน



### 2. พิจารณาจากขนาดของมุม จำแนกได้ดังนี้

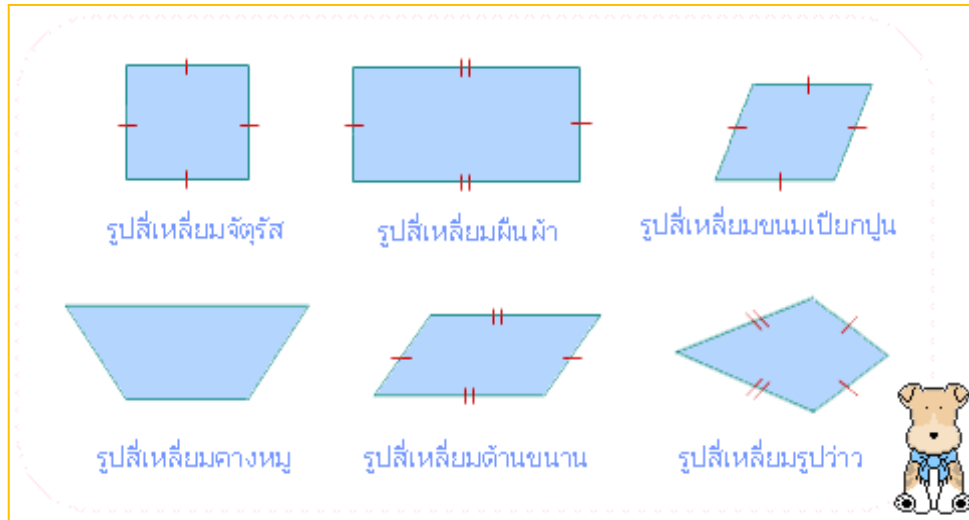
2.1 รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม (acute triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามมีขนาดเล็กกว่า มุมฉาก

2.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (right triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ มุมฉาก

2.3 รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน (obtuse triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมมุมหนึ่งมีขนาดใหญ่กว่ามุมฉาก

หมายเหตุ รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมนอกกระบบยูคลิด คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามมีขนาดเล็กกว่ามุมฉาก ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ได้เกิดจากส่วนของเส้นตรงสามเส้น และมุมภายในทั้งสามรวมกันได้น้อยกว่า  $180^\circ$

**รูปสี่เหลี่ยม (Quadrilateral)** เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรง 4 เส้น ที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้น เรียกว่า **ด้านของรูปสี่เหลี่ยม** รูปสี่เหลี่ยมใดๆ ประกอบด้วยด้าน 4 ด้าน และมุม 4 มุม



ที่มาของภาพ : [http://www.myfirstbrain.com/teacher\\_view.aspx?ID=45982](http://www.myfirstbrain.com/teacher_view.aspx?ID=45982)

#### - ส่วนประกอบของรูปสี่เหลี่ยม

1. **ด้านประชิด ( adjacent sides )** คือ ด้านสองด้านของรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดปลายร่วมกัน 1 จุด
2. **ด้านตรงข้าม ( opposite sides )** คือ ด้านสองด้านของรูปสี่เหลี่ยมที่ไม่มีจุดปลายร่วมกัน
3. **มุมประชิด ( adjacent angles )** คือ มุมสองมุมของรูปสี่เหลี่ยมที่มีแขนของมุมร่วมกันอยู่แขนหนึ่ง
4. **มุมตรงข้าม ( opposite angles )** คือ มุมสองมุมของรูปสี่เหลี่ยมที่ไม่มีแขนของมุมร่วมกัน
5. **มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม** ขนาดของมุมภายในทั้งสี่รวมกันได้  $360^\circ$
6. **เส้นทแยงมุม ( diagonal )** คือ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่ที่จุดยอดของมุมตรงข้าม

## - ชนิดของรูปสี่เหลี่ยม

1. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram) คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกันทั้ง 2 คู่ ซึ่งทำให้ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันด้วย เส้นทแยงมุมทั้งสองแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แต่ยาวไม่เท่ากัน

2. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoid) คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันเพียงคู่เดียว

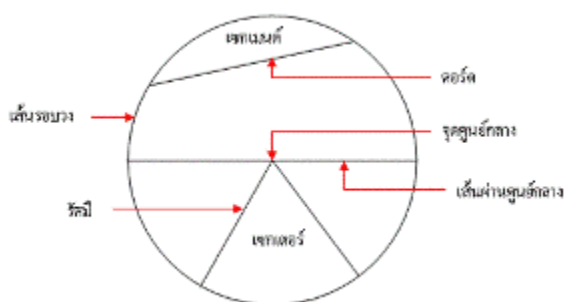
3. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (rectangle) คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมเป็นมุมฉาก ด้านประชิดยาวไม่เท่ากัน มีผลทำให้ด้านตรงข้ามขนานกันและยาวเท่ากัน เส้นทแยงมุมยาวเท่ากันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

4. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (square) คือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน มีผลทำให้เส้นทแยงมุมยาวเท่ากันแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตัดกันเป็นมุมฉาก

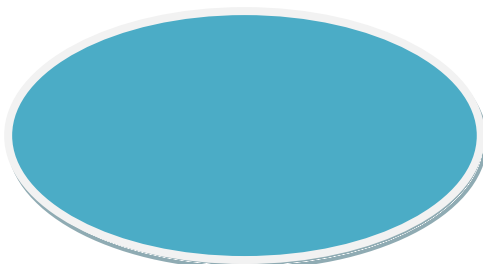
5. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (rhombus) คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เส้นทแยงมุมยาวไม่เท่ากัน แต่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตัดกันเป็นมุมฉาก

6. รูปสี่เหลี่ยมรูปร่างว (kite) คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านประชิดยาวเท่ากันเพียง 2 คู่เท่านั้น เส้นทแยงมุมยาวไม่เท่ากัน ไม่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แต่ตัดกันเป็นมุมฉาก

รูปวงกลม มีเส้นโค้งเป็นวงกลมและห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะทางเท่ากัน

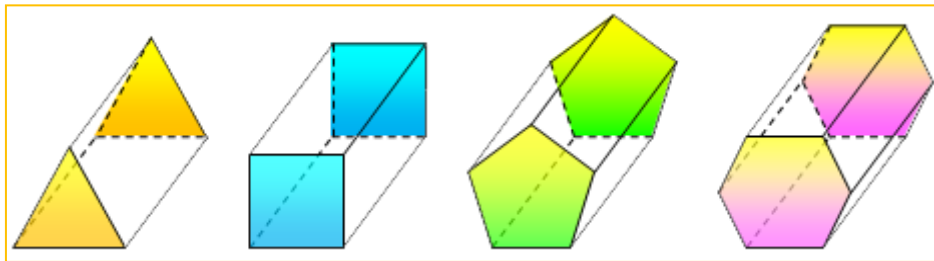


รูปวงรี มีเส้นโค้งเป็นวงรีและห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะทางไม่เท่ากัน



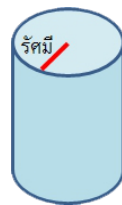
รูปเรขาคณิตสามมิติ ( **three - dimensional geometric figure** ) คือ สิ่งต่างๆ รอบตัวเราที่มีลักษณะสำคัญคือ มีความกว้าง ความยาว และความหนาหรือความสูง การจำแนกรูปเรขาคณิตสามมิติ พิจารณาจากรูปร่างลักษณะของรูปเรขาคณิตที่ประกอบกันเป็นทรง

1. **ปริซึม (Prism)** คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีหน้าตัด (ฐาน) ทั้งสองเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ และอยู่ในระนาบที่ขนานกัน มีหน้าข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



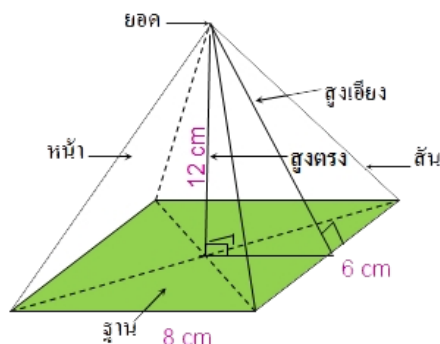
ที่มาของภาพ : <http://www.thaigoodview.com/node/132600?page=0,10>

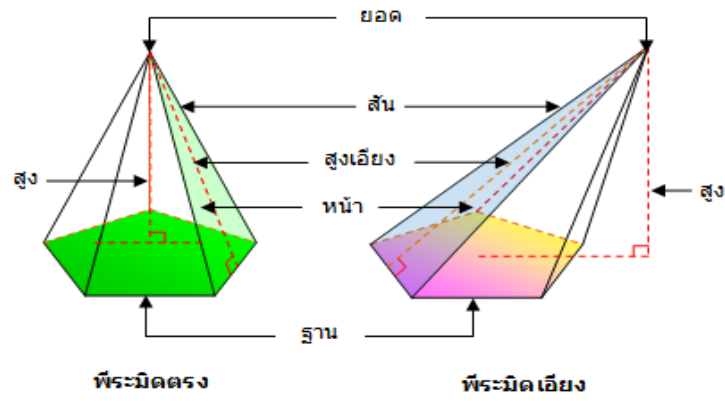
2. **ทรงกระบอก (cylinder)** คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีหน้าตัด (ฐาน) ทั้งสองเป็นรูปวงกลมที่เท่ากันทุกประการ และอยู่ในระนาบที่ขนานกันมีผิวโค้ง เมื่อคลี่หน้าข้างของทรงกระบอกตามแนวความสูง จะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



ที่มาของภาพ : <http://ganitasastra.wordpress.com/2013/06/15/circle-sphere-cylinder/>

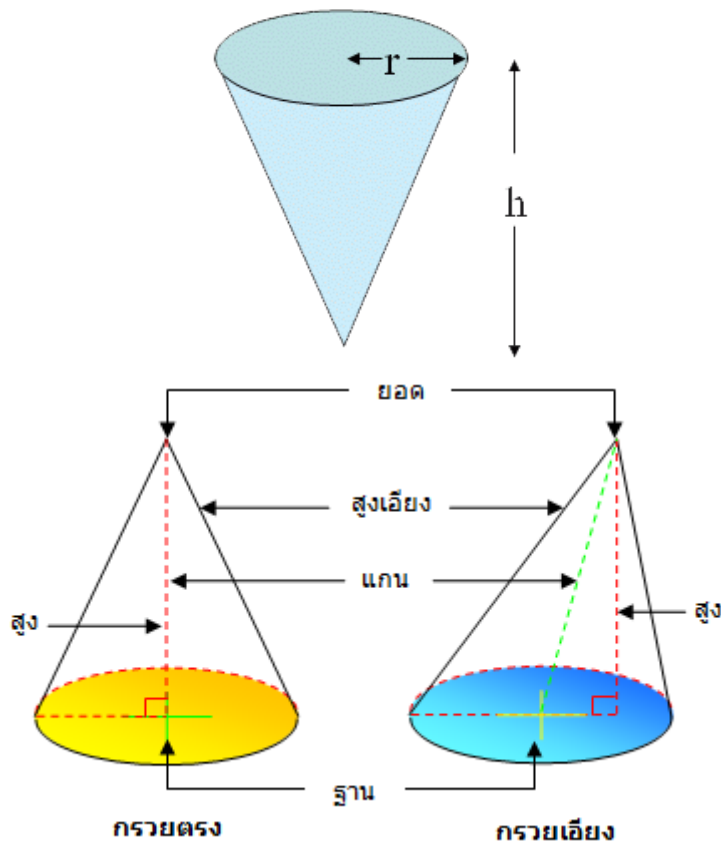
3. **พีระมิด (Pyramid)** คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยม มียอดแหลม ซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน และมีหน้าข้างเป็นรูปสามเหลี่ยม การเรียกชื่อพีระมิดเรียกตามลักษณะของรูปหลายเหลี่ยมที่เป็นฐาน เช่น พีระมิดฐานสามเหลี่ยม หมายถึง พีระมิดที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยม





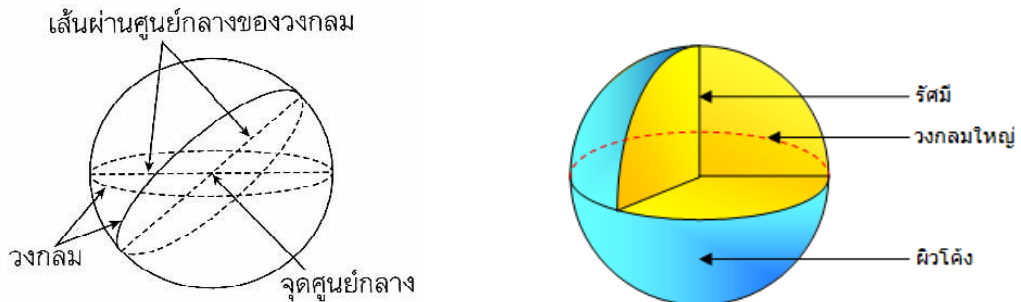
ที่มาของภาพ : <http://ganitasastra.wordpress.com/2013/04/02/pyramid/>

4. กรวย (Cone) คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปวงกลม มียอดแหลมซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกับฐาน และมีผิวโค้ง เมื่อคลี่หน้าข้างของกรวยออก จะได้รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง



ที่มาของภาพ : <http://www.thaigoodview.com/node/46868?page=0%2C12>

5. **ทรงกลม** คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีด้านข้างเป็นผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่ว่า "จุดศูนย์กลางของทรงกลม" เรียกระยะที่เท่ากันว่า "รัศมีของทรงกลม"



ที่มาของภาพ : <http://ganitasastra.wordpress.com/2013/06/15/circle-sphere-cylinder/>

### การประยุกต์ของการแปลงทางเรขาคณิต

การแปลงทางเรขาคณิต เป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการย้ายวัตถุจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง โดยอาจมีการเปลี่ยนแปลงขนาด รูปร่าง หรือตำแหน่ง ให้ต่างไปจากเดิมหรือไม่ก็ได้ ตัวอย่างของการแปลงที่เราเคยพบเช่น รถยนต์ซึ่งเดิมอยู่บนทางลาดชันเข้าไปจอดในช่องจอดรถ การหมุนของเข็มยาวของนาฬิกา จากปลายเข็มยาวชี้ที่ตัวเลข 12 ไปชี้ที่ตัวเลข 6 หรือลูกโป่งที่มีอากาศอัดอยู่เมื่อปล่อยอากาศออกทำให้ลูกโป่งเคลื่อนที่ออกไปและตกลงเมื่ออากาศที่อยู่ในลูกโป่งดันออกมาจนไม่มีแรงดัน สิ่งเหล่านี้เกี่ยวข้องกับการแปลงทั้งสิ้น

สิ่งสำคัญของการแปลง คือ จุดทุกจุดของวัตถุที่อยู่เดิม (หรือขนาดเดิม) จะต้องมีการส่งไปยังวัตถุที่ตำแหน่งใหม่ (หรือขนาดใหม่) ทุกจุด จุดต่อจุด

ในทางเรขาคณิตก็มีการแปลงที่กล่าวถึงความเกี่ยวข้องกันระหว่างรูปเรขาคณิตก่อนการแปลง และรูปเรขาคณิตหลังการแปลง เราเรียกรูปเรขาคณิตก่อนการแปลงว่า รูปต้นแบบ และเรียกรูปเรขาคณิตหลังการแปลงว่า ภาพที่ได้จากการแปลง

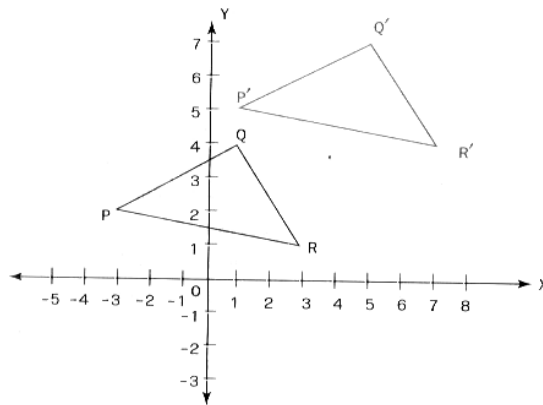
การแปลงทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานมีทั้งหมด 4 แบบ คือ การเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน และการย่อ / ขยาย แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงการแปลงทางเรขาคณิต 3 แบบ ได้แก่ การเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน การแปลงทางเรขาคณิตทั้งสามแบบนี้จะได้ภาพที่มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเดียวกันกับรูปต้นแบบเสมอ

## การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานต้องมีรูปต้นแบบ ทิศทางและระยะทางที่ต้องการเลื่อนรูป การเลื่อนขนานเป็นการแปลงที่จับคู่จุดแต่ละจุดของรูปที่ได้จากการเลื่อนรูปต้นแบบไปในทิศทางใดทิศทางหนึ่งด้วยระยะทางที่กำหนด จุดแต่ละจุดบนรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานระยะห่างจากจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบเป็นระยะทางเท่ากัน การเลื่อนในลักษณะนี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “สไลด์ (slide)” ในการบอกทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนาน จะใช้เวกเตอร์เป็นตัวกำหนด ซึ่งการกำหนดเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานอาจให้จุดเริ่มต้นอยู่บนรูปต้นแบบหรืออยู่นอกรูปต้นแบบก็ได้

โดยสมบัติของการเลื่อนขนานมีดังนี้

1. รูปที่ได้จากการเลื่อนขนานกับรูปต้นแบบเท่ากันทุกประการ
2. จุดแต่ละจุดที่สมนัยกันบนรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานกับรูปต้นแบบจะมีระยะห่างเท่ากัน
3. ภายใต้การเลื่อนขนาน จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและขนาดของรูปต้นแบบ



## การสะท้อน

การสะท้อน ( Reflection ) เป็นการแปลงที่จุดทุกจุดของรูปต้นแบบเคลื่อนที่ข้ามเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งเปรียบเหมือนกระจกหรือเรียกว่าเส้นสะท้อน โดยที่เส้นนี้จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดบนรูปสะท้อนที่สมนัยกัน

สมบัติของการสะท้อน

1. รูปที่เกิดจากการสะท้อนมีขนาดและรูปร่างเท่ากับรูปต้นแบบ หรือเท่ากันทุกประการกับรูปต้นแบบ



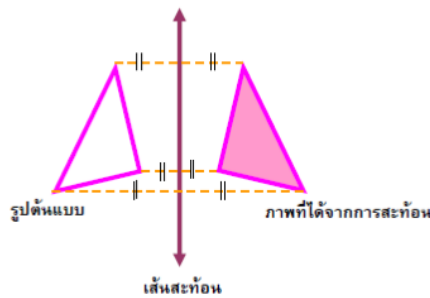
- รูปที่เกิดจากการสะท้อนกับรูปต้นแบบห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน
- จุดบนเส้นสะท้อนเป็นจุดคงที่ ไม่มีการสะท้อน

### การสะท้อนข้ามแกน X

ความหมายของการสะท้อนข้ามแกน X ในแง่ภาษา หมายถึง การสะท้อนจุดข้ามแกน X ใช้ค่าพิกัด X เดียวกัน และคูณค่าพิกัด Y ด้วย  $-1$  ในแง่พีชคณิต หมายถึง  $(X, Y)$  กลายเป็น  $(X, -Y)$

### การสะท้อนข้ามแกน Y

ความหมายของการสะท้อนข้ามแกน Y ในแง่ภาษา หมายถึง การสะท้อนจุดข้ามแกน Y คูณค่าพิกัด X ด้วย  $-1$  และใช้ค่าพิกัด Y เดิมในแง่พีชคณิต หมายถึง  $(X, Y)$  กลายเป็น  $(-X, Y)$

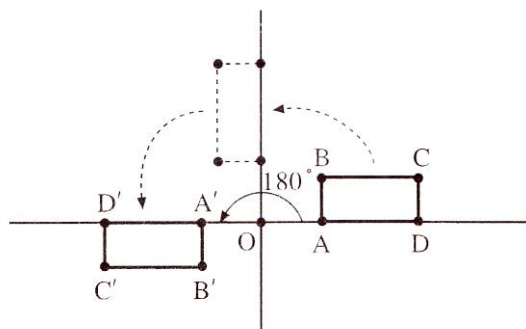


### การหมุน

การหมุน (Rotation) เป็นการแปลงที่จุดทุกจุดของรูปต้นแบบเคลื่อนที่ไปเป็นมุมเดียวกัน รอบจุดตรึงอยู่กับที่ที่กำหนดหรือจุดหมุน การหมุนจะหมุนทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา ตามขนาดของมุมและทิศทางที่ต้องการหมุนโดยทั่วไปถ้าไม่ระบุทิศทางของการหมุนจะถือว่าเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา การหมุนเป็นการแปลงที่เกิดจากการจับคู่ของ จุดแต่ละคู่ระหว่างรูปต้นแบบกับรูปที่ได้จากการหมุน

### สมบัติของการหมุน

- รูปที่ได้จากการหมุนกับรูปต้นแบบเท่ากันทุกประการ
- จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบเคลื่อนที่ที่รอบจุดหมุนด้วยขนาดของมุมที่กำหนด
- จุดหมุนเป็นจุดคงที่



## เทสเซลเลชัน

เทสเซลเลชัน คือการนำรูปทั้งที่เป็นรูปเรขาคณิตและรูปทั่วไปมาเรียงต่อกัน โดยมีเงื่อนไขว่ารูปที่นำมาจัดเรียงนั้นจะต้องไม่เกิดช่องว่างหรือการคาบเกี่ยวซ้อนกัน

เทสเซลเลชันจากรูปเรขาคณิตเกิดจากการนำชิ้นส่วนที่เป็นรูปเรขาคณิตลักษณะต่าง ๆ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปหกเหลี่ยม หรือ อื่น ๆ มาจัดเรียงต่อกันจนเต็มพื้นระนาบ โดยไม่เกิดช่องว่างหรือการคาบเกี่ยวซ้อนกัน ซึ่งในการสร้างเทสเซลเลชันอาจจะเกิดจากการ จัดเรียงชิ้นส่วนรูปเรขาคณิตเพียงชนิดเดียวหรือหลายชนิดก็ได้ ดังนั้นการสร้างเทสเซลเลชัน จากรูปเรขาคณิตจึงสามารถแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ คือ

1) เทสเซลเลชันที่เกิดจากชิ้นส่วนรูปเรขาคณิตเพียงชนิดเดียว หรือเรียกว่าเทสเซลเลชันแบบปรกติ(Regular Tessellation)

2) เทสเซลเลชันที่เกิดจากชิ้นส่วนรูปเรขาคณิตหลายชนิดซึ่งในงานเทสเซลเลชันประเภทนี้สามารถ แบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ คือ เทสเซลเลชันแบบเซมิเรกิวลาร์(Semi regular Tessellation) หรือ เทสเซลเลชันกึ่งปรกติและเทสเซลเลชันแบบเดมิเรกิวลาร์(Demi regular Tessellation)

ซึ่งในการสร้างงานเทสเซลเลชันจากรูปทั่วไปของเอสเซอร์พบว่างานเกือบทุกชิ้นของเขาได้ผสมผสานความคิดสร้างสรรค์และจินตนาการเข้ากับความรู้เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ซึ่งประกอบด้วย การเลื่อนทางขนาน(Translation) การสะท้อน(Reflection) การสะท้อนแบบเลื่อน(Glide-reflection) และการหมุน(Rotation) อย่างไม่อย่างหนึ่งเป็นอย่างน้อย

